



厦门大学《高等代数(II)》课程试卷

数学,经济学院各系 2025 年级各专业

主考教师: 杜妮, 阮诗佳, 陈继勇, 林鹭 试卷类型: A 卷

考试日期: 2026.06.18

一、单选题: (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设 V 是 n 维欧氏空间. 对于任意 $x, y \in V$, 下列命题错误的是_____. B
 - (A) $|x+y| \leq |x| + |y|$
 - (B) $|x+y| = |x| + |y|$ 当且仅当 x, y 线性相关
 - (C) $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$
 - (D) $(x, y)^2 = (x, x)(y, y)$ 当且仅当 x, y 线性相关
2. 设 V_1, V_2 是 n 维欧氏空间 V 的子空间, 且 $V_1 \subseteq V_2$. 记 $d = \dim V_1 + \dim V_2^\perp$. 下列说法正确的是_____. A
 - (A) d 可能等于 n
 - (B) d 可能大于 n
 - (C) d 一定小于 n
 - (D) d 一定大于 n
3. 设 φ 是有限维欧氏空间 V 的对称变换, 则下列命题中正确的有_____ 个. D
 - (a) φ 的特征值全是实数
 - (b) φ 在 V 的某个基下的矩阵是对角矩阵
 - (c) φ 的属于不同特征值的特征向量必正交
 - (d) 对任意 $X, Y \in V, (\varphi(X), Y) = (\varphi(Y), X)$
 - (A) 1
 - (B) 2
 - (C) 3
 - (D) 4
4. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为_____. B
 - (A) 2, 0
 - (B) 1, 1
 - (C) 2, 1
 - (D) 1, 2
5. 设 A 是3 阶实对称矩阵, E 是3 阶单位矩阵. 若 $A^2 + A = 2E$, 且 $\det(A) = 4$, 则二次型 $X^T A X$ 的规范形为_____. C
 - (A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$
 - (B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$
 - (C) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$
 - (D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$
6. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 且满足 A 与 $-A$ 合同, 则下列命题中错误的是_____. B
 - (A) A 的秩一定是偶数
 - (B) n 一定是偶数
 - (C) A 的符号差为零
 - (D) A 合同于 $-2A$

二、填空题: (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是欧氏空间 V 的一个正交基, 则 V 中向量 α 在这个基下的第 i 个坐标分量为 _____. $\frac{(\alpha, \xi_i)}{(\xi_i, \xi_i)}$

2. 设 A 为4阶正交矩阵, 且满足 A 的第2行第3列元素为 -1 . 则方程组 $AX = (0, 1, 0, 0)^T$ 的解为 _____. $(0, 0, -1, 0)^T$

3. 设 $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T$, $M = E_3 - 2vv^T$. 则 M 的正交相似标准形为 _____. $\text{diag}(1, 1, -1)$

4. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 的秩为 _____. 2

5. 设 A 是5阶实对称矩阵, 满足 $A^2 + 3A = O$, 且 $r(A) = 3$, 则 A 在 $\mathbb{C}$ 上的合同规范形是 _____. 在 $\mathbb{R}$ 上的合同规范形是 _____. $\text{diag}(E_3, O); \text{diag}(-E_3, O)$

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, 则使 $A + tE$ 正定的实数 t 的取值范围为 _____. $(1, -\infty)$

三、(12分) 设 A 是3阶不可逆实对称矩阵, 且 $X_1 = (1, -2, 1)^T$, $X_2 = (-1, a, 1)^T$ 分别为 A 的属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = -1$ 的特征向量.

(1) 求实数 a 及矩阵 A ;

(2) 计算 $A^{2026}Y$, 其中 $Y = (1, 1, 1)^T$.

解 (1) (法一) 因为 $X_1^T X_2 = 0$, 所以 $a = 0$.

因为 A 不可逆, 所以 A 还有特征值 0 . 又因为 A 实对称, 所以 0 特征值的特征向量 X_3 与 X_1, X_2 正交, 结合已知, 可取 $X_3 = (1, 1, 1)^T$. 因此

$$A = (X_1, X_2, X_3) \text{diag}(1, -1, 0) (X_1, X_2, X_3)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(法二) 如法一得 $a = 0$ 以及 A 有特征值 0 . 因为 A 实对称, 所以存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = \text{diag}(1, -1, 0)$. 记 $Q = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_1 = \frac{X_1}{|X_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T$, $\alpha_2 = \frac{X_2}{|X_2|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$,

$$\text{则 } A = Q \text{diag}(1, -1, 0) Q^T = \alpha_1^T \alpha_1 - \alpha_2^T \alpha_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(2) 因为 $AY = 0$, 所以 $A^{2026}Y = 0$.

常见错误 直接令 $Q = (X_1, X_2, X_3)$.

四、(12分)设实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2$$

经过正交线性替换 $X = QY$ 化为标准形

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2.$$

(1) 求常数 a ;

(2) 求正交矩阵 Q .

解 (1) 由已知得二次型矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, 正交相似于 $\text{diag}(1, 1, 10)$, 所以 $\text{tr}A =$

$a + 5 + 5 = 12$, 得 $a = 2$.

(2) A 的特征值为 $1, 1, 10$.

当 $\lambda = 1$ 时, $(E - A)X = 0$ 的基础解系 $X_1 = (-2, 1, 0)^T$, $X_2 = (2, 0, 1)^T$.

当 $\lambda = 10$ 时, $(10E - A)X = 0$ 的基础解系为 $X_3 = (-1, -2, 2)^T$.

正交化为

$$Y_1 = X_1 = (-2, 1, 0)^T, Y_2 = X_2 - \frac{(X_2, Y_1)}{(Y_1, Y_1)}Y_1 = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)^T,$$

单位化为

$$Z_1 = \frac{Y_1}{|Y_1|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)^T, Z_2 = \frac{Y_2}{|Y_2|} = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^T, Z_3 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T.$$

$$\text{所以 } Q = (Z_1, Z_2, Z_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{注 } Q \text{ 不唯一, 如 } \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{4}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ 等.}$$

常见错误1 基础解系计算错误.

常见错误2 Schmidt正交化计算错误, 单位化计算错误.

五、(12分)设 A 为 n 阶正交矩阵,且 $A+E$ 可逆(其中 E 为 n 阶单位矩阵).

(1) 求矩阵 A 的正交相似标准形;

(2) 证明存在正交矩阵 B ,使得 $B^2 = A$.

(鲍欣瑶, 蔡垂泽, 陈德畅, 陈冠宏, 陈思锦, 成镜夷, 崔宇博, 雕湛辰, 冯以煊, 符天睿, 宫晨诗, 关约晨, 黄冠浩, 黄孝津, 赖博妍, 李翰锴, 李文言, 李心辰, 李雨凡, 李知政, 连泽锡, 刘键鸿, 刘欣竹, 刘伊依, 刘云瀚, 莫砚如, 欧扬远方, 潘善烁, 彭佳诺, 邱诗雯, 沈欣瑜, 盛琬苘, 石浩宇, 孙艺譔, 王虹博, 王欣然, 翁钧泽, 吴润德, 许澜潇, 杨泽林, 尹欣然, 尤嘉琪, 张宝宇, 张晨雨, 张繁, 张瀚尹, 张俊, 张俊博, 张馨月, 赵晓, 郑羨, 周仁杰, 周岩靛 等)

证明 (1) 因为 A 是正交矩阵,所以 $\text{diag}(E_s, -E_t, C_1, C_2, \dots, C_l)$, 其中 $C_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, \dots, l$.

又因为 $A+E$ 可逆,所以 -1 不是 A 的特征值,存在正交矩阵 Q ,使得

$$Q^{-1}AQ = Q^T A Q = \text{diag}(E_s, C_1, C_2, \dots, C_l).$$

(2) 令 $S_i = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_i}{2} & -\sin \frac{\theta_i}{2} \\ \sin \frac{\theta_i}{2} & \cos \frac{\theta_i}{2} \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, \dots, l$. 取 $B = Q \text{diag}(E_s, -E_t, S_1, S_2, \dots, S_l) Q^T$, 则 B 是正交矩阵,且 $B^2 = A$.

常见错误 遗漏正交矩阵的特征值为复数的情形.

六、(10分)设 A 是 n 阶实对称正定矩阵, B 是 $n \times m$ 实矩阵. 证明: $B^T A B$ 正定的充要条件是 $r(B) = m$.

(白耀琛, 蔡承颖, 蔡仕轩, 陈采钰, 陈恩泽, 陈芷涵, 陈卓琳, 崔齐聪, 丁博, 付新悦, 甘立雄, 高靖轩, 郭睿, 郭翔浩, 郭义杭, 何建辉, 黄冠博, 黄启桓, 黄奕诚, 李佳骏, 李旭, 廖智炜, 林泓润, 刘羿辰, 陆柏羽, 马子宇, 彭俊旗, 丘洪彰, 陶兴源, 王允佑, 魏宇龙, 吴笛, 奚润东, 幸锦林, 徐子涵, 杨昊桐, 杨优爽, 姚辰, 张景瑜, 赵暖阳, 郑安庆, 郑曦, 郑哲楷, 郑智韬, 祝文涛 等)

证明 必要性 (法一) 由 A 实对称知存在可逆矩阵 P ,使得 $A = P^T P$. 故 $B^T A B = (PB)^T (PB)$.

因为 $B^T A B$ 正定,所以可逆,因此又 PB 是实矩阵,所以 $r(B) = r(PB) = r((PB)^T (PB)) = r(B^T A B) = m$.

(法二) 由 $B^T A B$ 正定,所以 $B^T A B$ 可逆, $r(B^T A B) = m$.

又由 $r(B^T A B) \leq r(B)$, B 是 $n \times m$ 矩阵,所以 $m = r(B^T A B) \leq r(B) \leq m$,因此 $r(B) = m$.

(法三) 反证法. 若 $r(B) \neq m$,则 $r(B) < m$,存在 $X_0 \neq 0$,使得 $BX_0 = 0$, $X_0^T B^T A B X_0 = 0$,与 $B^T A B$ 正定矛盾.

充分性 (法一) 显然 $B^T A B$ 实对称, 且对任意 $0 \neq X \in \mathbb{R}^m$, 因为 $r(B) = m$, P 可逆, 所以 $PBX \neq 0$, $X^T B^T A B X > 0$. 故 $B^T A B$ 正定.

(法二) 显然 $B^T A B$ 实对称, 对任意 $X \in \mathbb{R}^m$, $X^T B^T A B X = (BX)^T A (BX) \geq 0$. 因 A 正定, 故上式等于零成立的充要条件是 $BX = 0$.

又因 $r(B) = m$, 所以 $X = 0$. 故 $B^T A B$ 正定.

(法三) 因为 $r(B) = m$, 所以存在可逆 n 矩阵 P 和 m 阶可逆矩阵 Q , 使得 $B = P \begin{pmatrix} E_m \\ O \end{pmatrix} Q$. 因

$$\text{此 } B^T A B = Q^T (E_m, O) P^T A P \begin{pmatrix} E_m \\ O \end{pmatrix} Q.$$

因为 A 正定, P 可逆, 所以 $P^T A P$ 正定, 所以它的 m 阶顺序主子阵 A_m 正定. 又 $(E_m, O) P^T A P \begin{pmatrix} E_m \\ O \end{pmatrix} = A_m$, 结合 Q 可逆, $B^T A B = Q^T A_m Q$ 正定.

常见错误1 未指出 $B^T A B$ 实对称.

常见错误2 直接得 $r((PB)^T (PB)) = r(PB)$, 未指出 PB 是实矩阵.

常见错误3 因为 B 列满秩, 所以存在可逆矩阵 Q , 使得 $BQ = (E_m, O)^T$. 应改为存在可逆矩阵 P , 使得 $BQ = (E_m, O)^T$. 或存在可逆矩阵 P 和 Q , 使得 $PBQ = (E_m, O)^T$

七、(10分) 设 φ 是欧氏空间 V 上的一个反称变换, 即对任意的 $\alpha, \beta \in V$, 都有

$$(\varphi(\alpha), \beta) + (\alpha, \varphi(\beta)) = 0.$$

证明:

- (1) φ 是线性变换;
- (2) $\varphi - \text{id}_V$ 是可逆变换, 其中 id_V 是恒等变换;
- (3) $(\varphi + \text{id}_V)(\varphi - \text{id}_V)^{-1}$ 是正交变换.

(曹一杰, 陈泓州, 陈家兴, 陈其乐, 陈世钰, 陈晓琳, 高梓赫, 苟馨月, 黄祺翔, 侯金佑, 嵇绍洋, 林果, 林龙灿, 秦家浩, 邵佳伟, 童郑锋, 王浩明, 肖洋, 徐之晗, 游知理, 张文祥, 张阳, 张育维, 朱昶霖 等)

证明 (1) 对任意 $c \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in V$,

$$(\varphi(c\alpha_1 + \alpha_2), \beta) - (c\varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2), \beta) = -(c\alpha_1 + \alpha_2, \varphi(\beta)) + (c\alpha_1, \varphi(\beta)) + (\alpha_2, \varphi(\beta)) = 0,$$

所以 $\varphi(c\alpha_1 + \alpha_2) = c\varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2)$.

(2) (法一) 只要证明 $\varphi - \text{id}_V$ 是单射. 即由 $(\varphi - \text{id}_V)(\alpha) = 0$, 证明 $\alpha = 0$.

事实上, 若 $(\varphi - \text{id}_V)(\alpha) = 0$, 即 $\varphi(\alpha) = \alpha$, 结合已知条件有

$$2(\alpha, \alpha) = (\varphi(\alpha), \alpha) + (\alpha, \varphi(\alpha)) = -(\alpha, \varphi(\alpha)) + (\alpha, \varphi(\alpha)) = 0,$$

所以 $\alpha = 0$.

(法二) 只要证明1不是 φ 的特征值即可.

若不然, 设 A 是 φ 在 V 的某标准正交基下的矩阵, 1是 A 的特征值, X 是相应特征向量. 那么 $X^T A X = X^T X$. $X^T A X$ 为数, 等于其转置, 即 $X^T A^T X = X^T A X$.

又由已知有 $A^T = -A$, 所以 $X^T A^T X = -X^T A X = -X^T X$, 从而 $X^T X = 0$, 矛盾.

(法三) 设 A 是 φ 在 V 的某标准正交基下的矩阵. 由已知得 A 是反称矩阵.

由第八章复习题C4知, A 的特征值或为0, 或为纯虚数 ib , 其中 $0 \neq b \in \mathbb{R}$, 从而 $\varphi - \text{id}_V$ 特征值全非零, 因此可逆.

(法四) 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是 V 的标准正交基, φ 在该基下的矩阵是 A , 那么 $\varphi - \text{id}_V$ 在该基下的矩阵是 $A - E$, 只要证明 $(A - E)(A - E)^T$ 正定, 即得 $\varphi - \text{id}_V$ 可逆.

首先, $(A - E)(A - E)^T$ 实对称.

其次, 由已知得 $A^T = -A$. 则对任意 $0 \neq X \in \mathbb{R}^n$, $X^T(A - E)(A - E)^T X = (AX)^T(AX) + X^T X > 0$, 故 $(A - E)(A - E)^T$ 正定, 因此 $\varphi - \text{id}_V$ 可逆, 故 $\varphi - \text{id}_V$ 可逆.

(3) 记 $\tau = (\varphi + \text{id}_V)(\varphi - \text{id}_V)^{-1}$.

(法一) 对任意 $\alpha, \beta \in V$, 由 $\varphi - \text{id}_V$ 可逆知存在 $X, Y \in V$, 使得 $\alpha = (\varphi - \text{id}_V)X$, $\beta = (\varphi - \text{id}_V)Y$,

$$\begin{aligned} (\tau(\alpha), \tau(\beta)) &= ((\varphi + \text{id}_V)X, (\varphi + \text{id}_V)Y) \\ &= (\varphi(X) + X, \varphi(Y) + Y) + (\varphi(X), \varphi(Y)) + (X, \varphi(Y)) + (\varphi(X), Y) + (X, Y) \\ &= (\varphi(X), \varphi(Y)) + (X, Y) \\ (\alpha, \beta) &= ((\varphi - \text{id}_V)X, (\varphi - \text{id}_V)Y) \\ &= (\varphi(X) + X, \varphi(Y) + Y) - (\varphi(X), \varphi(Y)) - (X, \varphi(Y)) + (\varphi(X), Y) + (X, Y) \\ &= (\varphi(X), \varphi(Y)) + (X, Y) \end{aligned}$$

所以 $(\tau(\alpha), \tau(\beta)) = (\alpha, \beta)$, 因此 τ 正交.

(法二) 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是 V 的标准正交基, φ 在该基下矩阵是 A , 则由已知得 A 是反称矩阵. τ 在该基下矩阵是 $B = (A + E)(A - E)^{-1}$, 且

$$\begin{aligned} B^T B &= (A - E)^{-T}(A + E)^T(A + E)(A - E)^{-1} = (-A - E)^{-1}(-A + E)(A + E)(A - E)^{-1} \\ &= (-A - E)^{-1}(A + E)(-A + E)(A - E)^{-1} = E. \end{aligned}$$

因此 τ 是正交变换.

(法三) 因为 φ 是反称变换, 由第八章复习题C4知, 存在标准正交基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, 使得 φ 在该基下的矩阵是 $D = \text{diag}(0, 0, \dots, 0, B_1, B_2, \dots, B_l)$, 其中 $B_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix}$. 则

$$(B_i + E)(B_i - E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b_i \\ b_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+b_i^2} & \frac{b_i}{1+b_i^2} \\ -\frac{b_i}{1+b_i^2} & -\frac{1}{1+b_i^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1+b_i^2}{1+b_i^2} & \frac{2b_i}{1+b_i^2} \\ -\frac{2b_i}{1+b_i^2} & \frac{-1+b_i^2}{1+b_i^2} \end{pmatrix}$$

是正交矩阵, 因此 $(D+E)(D-E)^{-1}$ 是正交矩阵, 从而 τ 是正交变换.

常见错误1 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是 V 的一个基, 由 $(\varphi(\alpha), \beta) + (\alpha, \varphi(\beta)) = 0$, 则 φ 在该基下矩阵是反称矩阵.

常见错误2 (2)中, 若 $(\varphi - \text{id}_V)\alpha_1 = (\varphi - \text{id}_V)\alpha_2$, 则对任意 $\beta \in V$, $(\alpha_1 - \alpha_2, (\varphi - \text{id}_V)\beta) = -(\varphi - \text{id}_V)(\alpha_1 - \alpha_2), \beta) = 0$, 所以 $\alpha_1 = \alpha_2$. 应证明对任意 $\beta \in V$, 均有 $(\alpha_1 - \alpha_2, \beta) = 0$, 才能得到 $\alpha_1 = \alpha_2$.

八、(8分) 设 A 为 n 阶实可逆对称矩阵, 证明: A 为正定矩阵的充要条件是对任意的正定矩阵 B 总有 $\text{tr}(AB) > 0$.

(陈宇, 陈子墨, 郭子余, 黄郑艺, 李云鹭, 林俊祺, 刘若曦, 刘子毅, 王子墨, 吴蕴泽, 杨洪, 叶浩然, 张俊, 朱虹宇 等)

证明 必要性 (法一) 因为 A 正定, 所以存在可逆矩阵 C , 使得 $A = CC^T$. 对正定矩阵 B , 存在可逆矩阵 D , 使得 $B = DD^T$. 因此

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(CC^TDD^T) = \text{tr}(C^TDD^TC) = \text{tr}((D^TC)^T(D^TC)) > 0.$$

(法二) 因为 A 正定, 所以存在可逆矩阵 C , 使得 $A = CC^T$. 那么, $C^{-1}ABC = C^TBC$.

一方面, AB 相似于 C^TBC , 所以 AB 的特征值与 C^TBC 的特征值相同, 设为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

另一方面, 因为 C^TBC 合同于 B , 且 B 正定, 所以 C^TBC (即 AB)的特征值 $\lambda_i > 0$. 从而 $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$.

充分性 (法一) 反证法. 若 A 非正定, 因 A 实可逆对称, 所以存在可逆矩阵 P , 使得 $A = P\text{diag}(E_p, -E_q)P^T$, 其中 $q > 0$.

取 $k = \max\{1, p - q + 2\}$, $B = (P^T)^{-1}E(n(k))P^{-1}$, 其中 $E(n(k))$ 是倍法矩阵, 则 B 正定, 且 $AB = P\text{diag}(E_p, -E_{q-1}, -k)P^{-1}$, 此时 $\text{tr}(AB) = -k + p - q + 1 < 0$, 矛盾.

(法二) 反证法. 若 A 非正定, 因 A 实可逆对称, 所以存在可逆矩阵 P , 使得 $A = P\text{diag}(E_p, -E_q)P^T$, 其中 $q > 0$.

取 $c = \left\lceil \frac{p}{q} \right\rceil + 1$, $B = (P^T)^{-1} \text{diag}(E_p, cE_q) P^{-1}$, 则 B 正定, 且 $AB = P \text{diag}(E_p, -cE_q) P^{-1}$, 此时 $\text{tr}(AB) = p - cq < 0$, 矛盾.

(法三) 反证法. 若 A 非正定, 因 A 实可逆对称, 故存在正交矩阵 Q , 使得 $A = Q \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) Q^T$, 其中 λ_i 全非零, 且 $\lambda_1 < 0$.

令 $B = Q \text{diag}(\frac{n}{|\lambda_1|}, \frac{1}{|\lambda_2|}, \dots, \frac{1}{|\lambda_n|}) Q^T$ 正定, 且 $AB = Q \text{diag}(-n, c_2, \dots, c_n) Q^T$, 其中 $c_i = \pm 1, i = 2, 3, \dots, n$, 故 $\text{tr}(AB) = -n + c_2 + \dots + c_n < 0$, 矛盾.

(法四) 反证法. 若 A 非正定, 因 A 实可逆对称, 故存在正交矩阵 Q , 使得 $A = Q \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) Q^T$, 且 $\lambda_1 < 0$.

对任意 $\varepsilon > 0$, 令 $B = Q \text{diag}(1, \varepsilon, \dots, \varepsilon) Q^T$, 则 B 正定, 且 $AB = Q \text{diag}(\lambda_1, \varepsilon \lambda_2, \dots, \varepsilon \lambda_n) Q^T$.

若 $\sum_{i=2}^n \lambda_i \leq 0$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, $\text{tr}(AB) = \lambda_1 + \varepsilon \sum_{i=2}^n \lambda_i < 0$, 与已知矛盾;

若 $\sum_{i=2}^n \lambda_i > 0$, 取 $\varepsilon = -\frac{\lambda_1}{2 \sum_{i=2}^n \lambda_i} > 0$, 此时 $\text{tr}(AB) = \lambda_1 - \frac{\lambda_1}{2 \sum_{i=2}^n \lambda_i} \sum_{i=2}^n \lambda_i = \frac{\lambda_1}{2} < 0$, 与已知矛盾.

(法五) 反证法. 若 A 非正定, 因 A 实可逆对称, 故存在正交矩阵 Q , 使得 $A = Q \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) Q^T$, 其中 $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, p; \lambda_i < 0, i = p+1, p+2, \dots, n$. 记 $s = \sum_{i=1}^p \lambda_i, t = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i$, 则 $t < 0$.

令 $B = Q \text{diag}(E_p, -\frac{s}{t} E_{n-p}) Q^T$, 则 B 正定, 且 $AB = Q \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, -\frac{s}{t} \lambda_{p+1}, \dots, -\frac{s}{t} \lambda_n) Q^T$. 进而 $\text{tr}(AB) = s - \frac{s}{t} t = 0$, 与已知矛盾.

常见错误1 因为 A 正定, 所以 $A = P^T P$. 所以 $AB = P^T P B = P^T (P B P^{-1}) P$, 又由 B 正定, 因此 AB 特征值全正. 因为 AB 合同于 $P B P^{-1}$, 后者未必是实对称矩阵, 所以不能用惯性定理, 无法得到 AB 特征值全正.

常见错误2 必要性证明中, 因为 A, B 正定, 所以存在正交矩阵 Q , 使得 $A = Q \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) Q$, $B = Q \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) Q$.

常见错误3 充分性证明中, 设 $\lambda_1 < 0$, 取 $B = Q \text{diag}(1, 0, \dots, 0) Q$. B 非正定, 不合题意.